УДК 514.77
DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-2

Е. В. Боголепова, Н. И. Жукова

СУЩЕСТВЕННЫЕ ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ НЕКОМПАКТНЫХ ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКИХ ЛОРЕНЦЕВЫХ ОРБИФОЛДОВ

Аннотация.

Актуальность и цели. Лоренцева геометрия широко применяется в физике и значительно отличается от собственно римановой геометрии. Как известно, любой гладкий орбифолд допускает риманову метрику. Существование лоренцевой метрики на орбифолде накладывает ограничения на его структуру. Группа изометрий лоренцева орбифолда называется несущественной, если она действует собственно на этом орбифолде, в противном случае группа изометрий лоренцева орбифолда называется существенной. Целью данной работы является исследование структуры некомпактных гладких двумерных орбифолдов, допускающих полную плоскую лоренцеву метрику с существенной группой изометрий.

Материалы и методы. С помощью расслоения псевдо-ортогональных реперов строится и применяется каноническое накрывающее отображение для двумерных лоренцевых орбифолдов. Существование такого отображения показывает, что любой двумерный лоренцев орбифолд является очень хорошим.

Результаты. Доказано, что существует только два (с точностью до изоморфизма в категории орбифолдов) некомпактных двумерных орбифолда, допускающих полную плоскую лоренцеву метрику с существенной группой изометрий. Они представляют собой плоскость и $\mathbb{Z}_2$ -конус. При этом, в отличие от компактных орбифолдов, метрика может быть любой из указанного класса. Построены примеры.

Выводы. Полную плоскую лоренцеву метрику с существенной группой изометрий допускают строго четыре двумерных гладких орбифолда: плоскость, тор, $\mathbb{Z}_2$ -конус и «подушка».

Ключевые слова: орбифолд, лоренцев орбифолд, группа изометрий, существенная группа изометрий.

E. V. Bogolepova, N. I. Zhukova

ESSENTIAL ISOMETRY GROUPS OF NONCOMPACT TWO-DIMENSIONAL FLAT LORENZIAN ORBIFOLDS

Abstract.

Actuality and goals. Lorentzian geometry finds widespread application in physics and is radically different from Riemannian geometry. As it is known an every smooth orbifold admits a Riemannian metric. The existence of a Lorentzian metric on an orbifold imposes restrictions on its structure. The isometry group of a Lorentzian orbifold is called inessential if it acts properly, otherwise the isometry group of a Lorentzian orbifold is called essential. The goal of this work is the investigation of the structure of noncompact smooth two-dimensional orbifolds admitting a complete flat Lorentzian metric with an essential isometry group.

Methods. Using the bundle of pseudo-orthogonal frames some canonical covering map for two-dimensional Lorentzian orbifolds is constructed and applied. The existence of such map shows that any two-dimensional Lorentzian orbifold is very good.

Results. It is proved that there are only two (up to isomorphisms in the category of orbifolds) two-dimensional smooth noncompact orbifolds admitting complete flat Lorentzian metrics with an essential isometry group. They are the plane and the $\mathbb{Z}_2$-cone. Unlike compact orbifolds, the metric can be any from the class of flat complete Lorentzian metrics. Examples are constructed.

Conclusions. Only four two-dimensional smooth orbifolds allow complete flat Lorentzian metrics with the essential isometry group: the plane, the torus, the $\mathbb{Z}_2$-cone and the “pillow”.

Keywords*:* orbifold, Lorenzian orbifold, isometry group, essential isometry group.

Введение

Орбифолды можно рассматривать как многообразия с особенностями. Все орбифолды предполагаются связными, хаусдорфовыми, со счетной базой. n-мерные орбифолды локально представляют собой фактор-пространства $\mathbb{R}^n / \Gamma$ арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ по конечной группе диффеоморфизмов Γ, причем группа Γ не фиксирована и может меняться при переходе от одной точки к другой. Орбифолды естественным образом составляют категорию [1], которая обозначается через *Orb*. Многообразия образуют полную подкатегорию категории *Orb*.

Определение 1. Орбифолд, не являющийся многообразием, будем называть *собственным орбифолдом*.

Группа всех изометрий n-мерного лоренцева орбифолда (N,g) называется *полной* и обозначается через $J(N,g)$. Из [2] вытекает, что $J(N,g)$ является группой Ли размерности $\le n(n+1)/2$, где $n \ge 2$, причем равенство достигается только в случае многообразий, на которых группа изометрий транзитивна.

Определение 2. Гладкое действие $\Phi: G \times N \to N$ группы Ли G на орбифолде N называется *собственным*, если для любых компактных подмножеств K и F в N подмножество $Q = \{g \in G \mid g(K) \cap F \ne \varnothing\}$ компактно.

Группа изометрий орбифолда $J(N,g)$ называется *существенной*, если она действует несобственно на N [3]. Элемент $\varphi \in J(N,g)$ называется *существенным*, если порожденная им группа $\Phi = \langle\varphi\rangle$ является существенной.

Как известно [3], полная группа Ли изометрий риманова орбифолда (N,g) и любая ее замкнутая подгруппа действуют собственно на N. Таким образом, существенность группы изометрий $J(N,g)$ псевдориманова орбифолда (N,g) означает значительное отличие действий этой группы от действий замкнутых подгрупп полных групп изометрий римановых орбифолдов.

Несобственные действия групп изометрий лоренцевых компактных многообразий исследовались в работах Амбры и Громова [4], Циммера [5], Зегхиба [6, 7] и других, см. обзор Барбота и Зегхиба [8].

Деффаф, Мельник и Зегхиб [9] поставили проблему классификации замкнутых лоренцевых многообразий с некомпактными полными группами Ли изометрий. Естественно поставить эту проблему для более широкого класса объектов – лоренцевых орбифолдов.

Жукова и Рогожина [10] эту задачу решили для двумерных компактных лоренцевых орбифолдов, доказали, что существенную группу изометрий имеют только полные плоские метрики на торе и на орбифолде с четырьмя особыми точками, называемом «подушкой» и привели классификацию указанных метрик. В работе [10] установлено также, что лоренцев тор с существенной группой изометрий характеризуется существованием изометрии, являющейся аносовским автоморфизмом тора.

В данной работе задача классификации некомпактных орбифолдов, допускающих полные плоские лоренцевы метрики с существенной группой изометрий, решена нами в размерности $n = 2$ (теорема 2).

Мы используем терминологию Терстона [11], согласно которой орбифолд называется хорошим, если он представим в виде пространства орбит M/Ψ многообразия M по некоторой группе диффеоморфизмов Ψ. Если при этом группа Ψ конечна, то орбифолд N называется очень хорошим.

Пусть (M_1, g_1) и (M_2, g_2) – псевдоримановы многообразия и $k: M_1 \to M_2$ – накрывающее отображение. Напомним, что $k: M_1 \to M_2$ называется псевдоримановым накрывающим отображением, если k является локальной изометрией.

Определение 3. Если Ψ – группа изометрий псевдориманова многообразия (M, g_M), собственно разрывно действующая на M, то на фактор-пространстве M/Ψ естественным образом определена структура псевдориманова орбифолда $(M/\Psi, d)$, называемого *псевдоримановым фактор-орбифолдом*, а фактор-отображение $r: M \to M/\Psi$ является регулярным накрывающим отображением, которое называется псевдоримановым.

Пусть $k: M_1 \to M_2$ – псевдориманово регулярное накрывающее отображение лоренцевых орбифолдов (M_1, g_1) и (M_2, g_2). Как показывают примеры, если одна из групп изометрий $J(M_1, g_1)$ или $J(M_2, g_2)$ существенная, то другая группа может быть несущественной (см. доказательство леммы 4 и пример 1).

Для любого собственного двумерного лоренцева орбифолда (N, g) мы доказываем существование некоторого канонического псевдориманова накрывающего отображения $f: (M, g) \to (N, g)$ лоренцевым многообразием (M, g), обладающего следующими свойствами.

Теорема 1. Для любого собственного двумерного лоренцева орбифолда (N, g) существуют двумерное лоренцево многообразие (M, g_M), конечная группа Ψ изометрий (M, g_M), изоморфная либо $\mathbb{Z}_2$, либо $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, и лоренцев фактор-орбифолд $(M/\Psi, d)$, обладающие свойствами:

1) существует изометрия $k: M/\Psi \to N$ лоренцева фактор-орбифолда $(M/\Psi, d)$ на (N, g) и $r = k \circ h: M \to$ N – конечно листное регулярное псевдориманово накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе Ψ;

2) группа изометрий $J(N, g)$ существенная тогда и только тогда, когда нормализатор $N(\Psi)$ группы Ψ в группе $J(N, g)$ является существенной группой;

3) если группа изометрий $J(N, g)$ существенная, то группа изометрий $J(M, g)$ также существенная; обратное, вообще говоря, не верно.

Следствие 1. Любой двумерный лоренцев орбифолд очень хороший.

Определение 4. Обозначим через $\Psi = <\psi>$ группу диффеоморфизмов плоскости $\mathbb{R}^2$, изоморфную $\mathbb{Z}_2$, где $\psi: \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2, \psi(\mathrm{x}) = (-\mathrm{x}) \forall \mathrm{x} \in \mathrm{R}^2$. Фактор-орбифолд $\mathbb{R}^2 / \Psi$ будем называть $\mathbb{Z}_2$*-конусом*.

Применяя теорему 1, мы доказываем следующую теорему, являющуюся основным результатом данной работы.

Теорема 2. С точностью до изоморфизмов в категории *Orb* существует только два двумерных некомпактных гладких орбифолда N, допускающих полную плоскую лоренцеву метрику g с существенной группой изометрий, которые представляют собой псевдоевклидову плоскость $\mathbb{E}_1^2$ и $\mathbb{Z}_2$-конус, причем g – любая полная плоская лоренцева метрика. Полные группы изометрий указанных орбифолдов равны $J\left(\mathbb{E}_1^2\right) = O(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ и $J\left(\mathbb{E}_1^2 / \Psi\right) = O(1,1) / \mathbb{Z}_2$.

Определение 5. Говорят, что группа диффеоморфизмов G орбифолда N *стационарно несобственная*, если существует такая точка $x \in N$, что стационарная подгруппа G_x группы G в точке x действует несобственно на N.

Из работы [10] для компактных орбифолдов и из доказательства теоремы 2 для некомпактных орбифолдов вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. Группа изометрий $J(N, g)$ полного плоского двумерного лоренцева орбифолда (N, g) несобственная тогда и только тогда, когда она стационарная несобственная.

1. Основные понятия и обозначения

1.1. Псевдоевклидова метрика в $\mathbb{R}^n$

Псевдориманова метрика g сигнатуры $(k, n-k)$ в $\mathbb{R}^n$ называется *псевдоевклидовой*, если в $\mathbb{R}^n$ существует глобальная система координат $0, x^1, \ldots, x^n$, в которой метрика g имеет вид

$$g = -dx^1 \otimes dx^1 - \ldots - dx^k \otimes dx^k + dx^{k+1} \otimes dx^{k+1} + \ldots + dx^n \otimes dx^n.$$

Нетрудно проверить, что полная плоская псевдориманова метрика в $\mathbb{R}^n$ является псевдоевклидовой.

1.2. Псевдоортогональная группа

Пусть $O(1,1)$ – псевдоортогональная группа. Для ее элементов будем использовать следующие обозначения:

$$A_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix}, E^{+-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_t^{+-} = A_t E^{+-}, A_t^{-+} = -A_t^{+-} \forall t \in R.$$

Отметим, что $A \in O(1,1)$ – аносовский автоморфизм псевдоевклидовой плоскости $\mathbb{E}_1^2$ тогда и только тогда, когда $|trA| > 2$. Компонента единицы $O_e(1,1)$ образована матрицами A_t со следом $trA_t \geq 2$.

Заметим, что отображение $\mathbb{R}^1 \to O_e(1,1) : t \mapsto A_t, t \in \mathbb{R}^1$, – изоморфизм аддитивной группы действительных чисел $\mathbb{R}^1$ и $O_e(1,1)$.

2. Доказательство теоремы 1

2.1. Каноническое накрытие для собственного лоренцева орбифолда и его свойства

Пусть (N, g) – произвольный собственный двумерный лоренцев орбифолд. Рассмотрим расслоение реперов $q : T \to N$ над N. Как известно, T является гладким многообразием размерности 6. Задание лоренцевой метрики g на N определяет редукцию указанного главного $GL(2,\mathbb{R})$-расслоения реперов к замкнутой подгруппе Ли $H_0 = O(1,1)$, которое обозначим $p : P_0 \to N$, где $p = q|_{P_0}$. Подчеркнем, что P_0, так же как T, является гладким многообразием, вообще говоря, несвязным. При этом на P_0 определено локально свободное действие группы H_0 и $N = P_0 / H_0$.

Группа Ли $H_0 = O(1,1)$ с компонентой единицы $H_e = O_e(1,1)$ имеет три замкнутые подгруппы Ли индекса два:

$$H_1 = H_e \sqcup H_e(-E), \; H_2 = H_e \sqcup H_e E^{+-}, \; H_3 = H_e \sqcup H_e E^{-+}.$$

Если P_0 – несвязное многообразие, то будем рассматривать его связную компоненту. Она является главным H_i-расслоением над N для одного из $i \in \{1,2,3\}$ и обозначается через P_i.

Подчеркнем, что на каждом P_i при $i \in \{0,1,2,3\}$ определено локально свободное действие группы H_i и $N = P_i / H_i$. Следовательно, на каждом многообразии P_i при $i \in \{0,1,2,3\}$ определено локально свободное действие нормальной подгруппы H_e группы H_i. Пусть $M_i = P_i / H_i$. Так как группа $H_e = O_e(1,1)$ изоморфна группе $\mathbb{R}^1$, то она не имеет конечных подгрупп. Следовательно, H_e действует свободно на P_i, поэтому M_i – гладкое многообразие.

Фактор-группа $\Phi_i = H_i / H_e$, изоморфная $\mathbb{Z}_2$ при $i \in \{1,2,3\}$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ при $i = 0$, локально свободно действует на многообразии M_i, причем фактор-орбифолд M_i / Ψ_i изоморфен N в категории орбифолдов *Orb*. Отождествим N с фактор-орбифолдом M_i / Ψ_i по этому изоморфизму и обозначим через $r_i : M_i \mapsto M_i / \Psi_i \cong N$ фактор-отображение. Заметим, что $r_i : M_i \to N$ – накрывающее отображение для N с группой накрывающих отображений Φ_i, изоморфной $\mathbb{Z}_2$ при $i \in \{1,2,3\}$ и $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ при $i = 0$.

Таким образом, доказано первое утверждение теоремы 1.

Определение 6. Построенное выше регулярное накрывающее отображение $r_i : M_i \to N$ будем называть *каноническим накрывающим отображением* для двумерного лоренцева орбифолда (N, g) и обозначать через $r : M \to N$.

Определение 7. Пусть $r : M \to N$ – накрывающее отображение для орбифолда N. Говорят, что $\widehat{f} \in Diff(M)$ лежит над $f \in Diff(N)$, если $r \circ \widehat{f} = f \circ r$.

Из работы [10, предложение 1] вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть (N, g) – собственный лоренцев орбифолд и $r : M \to N$ – его каноническое накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Ψ. Тогда на многообразии M индуцирована лоренцева метрика g_M, относительно которой группа Ψ является группой изометрий (M, g_M), причем имеют место свойства:

1) для любого $f \in J(N, g_N)$ существует изометрия $\widehat{f} \in J(M, g)$, лежащая над f;

2) изометрия $\widehat{f} \in J(M, g)$ лежит над некоторой изометрией $f \in J(N, g_N)$ тогда и только тогда, когда $\Psi \circ \widehat{f} = \widehat{f} \circ \Psi$;

3) множество всех изометрий $\widehat{f} \in J(M, g)$, лежащих над изометриями из группы $J(N, g_N)$, совпадает с нормализатором $N(\Psi)$ группы Ψ в $J(M, g)$, причем группы Ли $J(N, g_N)$ и $N(\Psi) / \Psi$ изоморфны.

2.2. Доказательство утверждения 2 теоремы 1

Обозначим через (N, g) собственный лоренцев орбифолд, а через $r : M \to N$ – его каноническое накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Ψ. Пусть $J(N, g)$ и $J(M, g_M)$ – полные группы изометрий (N, g) и (M, g_M) соответственно, а $N(\Psi)$ – нормализатор группы Ψ в группе Ли $J(M, g_M)$. Согласно предложению 1 можно отождествить группу Ли $J(N, g)$ с фактор-группой $N(\Psi) / \Psi$. Обозначим через $h : N(\Psi) \to N(\Psi) / \Psi \cong J(N, g)$ фактор-отображение.

Введем обозначения: $Q = \{f \in J(N,g) \mid f(K) \cap F \neq \varnothing\}$, где K и F – любые компактные подмножества в N, $\hat{Q} = \{\hat{f} \in N(\Psi) \mid f(\hat{K}) \cap \hat{F} \neq \varnothing\}$, где $\hat{K}$ и $\hat{F}$ – любые компактные подмножества в M. Напомним, что отображение топологических пространств называется собственным, если прообраз любого компактного подмножества компактен. Поскольку группа Ψ конечна, проекция $r : M \to N$ является непрерывным собственным отображением. Кроме того, согласно предложению 1 каждая изометрия из группы $J(N,g)$ накрывается некоторым преобразованием из $N(\Psi)$ и любая изометрия из $N(\Psi)$ проектируется относительно r в некоторую изометрию из группы $J(N,g)$. Используя это, нетрудно проверить выполнение равенства $\hat{Q} = h^{-1}(Q)$.

Так как фактор-отображение $h : N(\Psi) \to N$ собственное, то Q компактно в группе Ли $J(N,g)$ тогда и только тогда, когда $\hat{Q}$ компактно в замкнутой нормальной подгруппе $N(\Psi)$. Это означает, что обе группы $J(N,g)$ и $N(\Psi)$ действуют одновременно либо собственно, либо несобственно. □

2.3. Доказательство утверждения 3 теоремы 1

Предположим, что группа Ли изометрий $J(N,g)$ двумерного лоренцева орбифолда (N,g) действует несобственно на N. Из доказанного утверждения 2 вытекает, что замкнутая подгруппа Ли $N(\Psi)$ группы $J(N,g)$ действует несобственно на гладком многообразии M, поэтому группа $J(M,g_M)$ также действует несобственно на M. Пример 1 показывает, что обратное, вообще говоря, неверно. □

3. Несобственные действия групп изометрий некомпактных плоских лоренцевых орбифолдов

3.1. Группа изометрий полного плоского лоренцева цилиндра

Используя известные утверждения о поднятии диффеоморфизмов на универсальное накрывающее пространство, мы получаем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть (M^0, g^0) и (M,g) – псевдоримановы многообразия, а $k : M^0 \to M$ – универсальное псевдориманово накрывающее отображение с группой накрывающих преобразований Γ. Тогда

1) для любой изометрии f псевдориманова многообразия (M,g) существует изометрия $\tilde{f}$ псевдориманова многообразия (M^0, g^0), лежащая над f. Множество всех изометрий из $J(M^0, g^0)$, лежащих над изометриями из группы Ли $J(M,g)$, является нормализатором $N(\Gamma)$ группы Γ в группе Ли $J(M^0, g^0)$, причем группы Ли $N(\Gamma)/\Gamma$ и $J(M,g)$ изоморфны;

2) если группа Ли $N(\Gamma)$ несущественна, то и группа Ли $J(M,g)$ несущественна.

Аффинные преобразования плоскости обозначаются парой $<A,a>$, где A – двумерная невырожденная квадратная матрица, a – матица-столбец. Композиция элементов $<A,a>$ и $<B,b>$ аффинной группы определяется равенством $<A,a>\circ<B,b>=<AB,a+Ab>$.

Пусть $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ – стандартный базис на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Лемма 2. Группа Ли всех изометрий двумерного полного плоского лоренцева цилиндра несущественна.

Доказательство. Будем рассматривать гладкий цилиндр M как фактор-многообразие $M=\mathbb{R}^2/\Gamma$ плоскости $\mathbb{R}^2$ по группе диффеоморфизмов $\Gamma=<\gamma>$, где $\gamma=<E,e_1>, e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Фактор-отображение $k:\mathbb{R}^2\to M=\mathbb{R}^2/\Gamma$ является универсальным накрывающим отображением с группой накрывающих преобразований $\Gamma\cong\mathbb{Z}$.

По условию на цилиндре M задана полная плоская лоренцева метрика g, следовательно, на плоскости $\mathbb{R}^2$ индуцирована лоренцева метрика $g^0=k^*g$, также являющаяся полной и плоской. Поэтому матрица G метрического тензора g^0 в стандартном базисе имеет постоянные коэффициенты: $G=\left(g_{ij}\right), i,j=1,2$. Полная группа Ли $J\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$ изометрий равна полупрямому произведению $J_0\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)\ltimes\mathbb{R}^2$, где $J_0\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$ – стационарная подгруппа в нуле $0_2\in\mathbb{R}^2$.

Предположим, что цилиндр (M,g) имеет существенную полную группу изометрий $J(M,g)$. Так как цилиндр (M,g) – полное однородное пространство, то согласно [11] стационарная подгруппа $J_O(M,g)$ в точке $O=k(0_2)$ также существенная. Следовательно, найдется существенное преобразование $f=<A,0>\in J_O(M,g)$. Так как $k:\mathbb{R}^2\to M=\mathbb{R}^2/\Gamma$ – универсальное накрывающее отображение, то по лемме 1 найдется существенная изометрия $\widehat{f}\in J\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$, лежащая над f относительно k. Поскольку $0_2\in k^{-1}(O)$, то $z=\widehat{f}(0_2)\in k^{-1}(O)$. Так как группа накрывающих преобразований $\Gamma\subset J\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$ транзитивна на слое $k^{-1}(O)$, то существует такой элемент $\gamma\in\Gamma$, что $\gamma(z)=0_2$. Тогда $\widetilde{f}=\gamma\circ\widehat{f}$ – существенная изометрия, лежащая над f относительно k: $\mathbb{R}2\to M$, причем $\widetilde{f}(0_2)=0_2$. Таким образом, $\widetilde{f}=<B,0>\in J_0\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$. Заметим, что $\widetilde{f}^{\,2} = \tilde{f}\circ\tilde{f}\in N(\Gamma)$ и сохраняет ориентацию плоскости, поэтому, не нарушая общности, считаем, что $\tilde{f} =< B,0 >\in N(\Gamma)$ сохраняет ориентацию плоскости, в противном случае перейдем к $\tilde{f}^2 \in N(\Gamma)$.

Следовательно, $\tilde{f} =< B,0 >$ удовлетворяет равенству $\tilde{f} \circ \Gamma = \Gamma \circ \tilde{f}$.

Отсюда вытекает, что найдутся такие целые числа n и m, что

$$< B,0 > \circ < E, e_1 > = < E, n{\cdot}e_1 > \circ < B,0 >, \ < B,0 > \circ < E, m{\cdot}e_1 > = < E, e_1 > \circ < B,0 >.$$

Пусть $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тогда из двух предыдущих равенств вытекает, что $a=m,\ c=0,\ a=1/n$, это влечет равенства $a=\pm 1$ и $c=0$. Поскольку преобразование $\tilde{f} =< B,0 >$ сохраняет ориентацию плоскости, необходимо, чтобы $det(B) = ad = 1$, откуда $\pm 1 \cdot d = 1$ и $d = \pm 1$. Таким образом, необходимо, чтобы $B=\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$. Матрица $G = (g_{ij}),\ i,j = 1,2,$ полной плоской лоренцевой метрики g^0 на $\mathbb{R}^2$ в стандартном базисе имеет вид $G = (g_{ij}),\ i,j = 1,2,$, где g_{ij} – постоянные.

Преобразование $< B,0 >$ является изометрией, принадлежащей $J(\mathbb{R}^2, g^0)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $B^T{\cdot}G{\cdot}B = G$, где $G = (g_{ij})$ – матрица метрического тензора g^0, а матрица B^T получена транспонированием B. Запишем предыдущее равенство в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ b & \pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix},$$

что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \pm b{\cdot}g_{11} = 0 \\ b(b{\cdot}g_{11} \pm 2{\cdot}g_{12}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b{\cdot}g_{11} = 0 \\ b{\cdot}g_{12} = 0, \end{cases}$$

откуда необходимо $b=0$. Следовательно, $B=\pm E$ и $\tilde{f} =<B,0>$ – несущественное преобразование, поэтому группа $N(\Gamma)$ несущественная. Согласно лемме 1 группа $J(M,g)$ также несущественная, что противоречит предположению и завершает доказательство леммы 2. □

3.2. Несущественность группы изометрий открытого полного плоского лоренцева листа Мебиуса

Определение 8. Пусть (M,g) – фактор-многообразие $M = \mathbb{R}^2 / \Gamma$ плоскости $\mathbb{R}^2$ по группе диффеоморфизмов $\Gamma=<\gamma>\cong Z$, где $\gamma =< E^{+-}, e_1 >$. При этом (M,g) называется *открытым листом Мебиуса*.

Лемма 3. Пусть (M,g) – открытый лист Мебиуса с полной плоской лоренцевой метрикой g. Тогда его полная группа Ли изометрий $J(M,g)$ несущественна.

Доказательство. Поскольку открытый гладкий лист Мебиуса M есть фактор-многообразие $M=\mathbb{R}^2/\Gamma$ плоскости $\mathbb{R}^2$ по группе диффеоморфизмов $\Gamma=<\gamma>$, где $\gamma=<E^{+-},e_1>$, фактор-отображение $k:\mathbb{R}^2\to M=\mathbb{R}^2/\Gamma$ является универсальным накрывающим отображением с группой накрывающих преобразований Γ, изоморфной группе $\mathbb{Z}$.

Так как на открытом листе Мебиуса M задана полная плоская лоренцева метрика g, то на плоскости $\mathbb{R}^2$ индуцирована лоренцева метрика $g^0=k^*g$, также являющаяся полной и плоской. Поэтому матрица G метрического тензора g^0 в стандартном базисе имеет постоянные коэффициенты: $G=\left(g_{ij}\right)$, а полная группа Ли $J\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$ изометрий равна полупрямому произведению $J_0\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)\ltimes\mathbb{R}^2$, где $J_0\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$ – стационарная подгруппа в нуле $0_2\in\mathbb{R}^2$.

Предположим, что (M,g) имеет существенную полную группу изометрий $J(M,g)$. Пусть $N(\Gamma)$ – нормализатор группы Γ в группе Ли $J\left(\mathbb{R}^2,g^0\right)$. По лемме 1 группа Ли $N(\Gamma)$ также является существенной, поэтому найдется существенное преобразование $\tilde{f}=<S,s>\in N(\Gamma)$. Не нарушая общности, будем считать, что $\widetilde{f}=<S,s>$, где $det(S)=1$. Так как $\widetilde{f}=<S,s>$ удовлетворяет равенству $\widetilde{f}\circ\Gamma=\Gamma\circ\widetilde{f}$, то найдутся такие целые числа *n* и *m*, что

$$<S,s>\circ<E^{+-},e_1>=<E^{+-},n\cdot e_1>\circ<S,s>,$$

$$<S,s>\circ<E^{+-},m\cdot e_1>=<E^{+-},e_1>\circ<S,s>.$$

Пусть $S=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, тогда из предыдущих равенств вытекает, что $a=m$, $c=0$, $a=1/n$ и, кроме того, $S\cdot E^{+-}=E^{+-}\cdot S$.

Так же как в случае цилиндра отсюда мы получаем, что $S=\begin{pmatrix} \pm1 & 0 \\ 0 & \pm1 \end{pmatrix}$.

Предыдущее равенство можно записать в виде $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, откуда следует $b=c=0$.

Таким образом, $S=\pm E$, что противоречит существенности $\widetilde{f}$ и, следовательно, существенности группы изометрий $\mathrm{N}(\Gamma)$.

3.3. Существенность групп изометрий лоренцевых орбифолдов, канонически накрытых псевдоевклидовой плоскостью

Лемма 4. Пусть $r:\mathbb{R}^2 \to N$ – каноническое накрытие лоренцева орбифолда (N,g) псевдоевклидовой плоскостью $\mathbb{E}_1^2 = (\mathbb{R}^2, g_0)$, где $g^0 = k^* g$. Тогда для того чтобы группа изометрий $J(N,g)$ была существенной, необходимо и достаточно, чтобы орбифолд N был $\mathbb{Z}_2$-конусом.

Доказательство. Рассмотрим все возможные случаи, используя обозначения, введенные в разд. 1 и 3.1. Предположим сначала, что $\Psi = <\psi> \cong \mathbb{Z}_2$, тогда необходимо, чтобы $\psi^2 = id_{\mathbb{R}^2}$. Кроме того, изометрия ψ должна иметь неподвижную точку, в противном случае N – многообразие. Если нуль 0_2 в $\mathbb{R}^2$ не является неподвижной точкой, то мы перенесем начало координат в одну из неподвижных точек изометрии ψ, тогда $\psi = <A, 0>$ и $A^2 = E$. Последнее равенство выполняется только в трех случаях: 1) $A = -E$; 2) $A = E^{+-}$; 3) $A = E^{-+}$.

Случай 1: $i=1, \Psi = <\psi> \cong \mathbb{Z}$, где $\psi = <-E, 0>$. Напомним, что орбифолд $N = \mathbb{R}^2 / \Psi$ называется $\mathbb{Z}_2$-конусом. Нормализатор $N(\Psi)$ группы Ψ в группе изометрий $J\left(\mathbb{E}_1^2\right) \cong O(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ равен $O(1,1)$. Следовательно, согласно теореме 1 и предложению 1 группа изометрий $J(N,g)$ существенна и изоморфна фактор-группе $O(1,1) / \{\pm E\}$.

Случай 2: $i=2, \Psi = <\psi>$ $i=2, \Psi = <\psi>$, где $\psi = <E^{+-}, 0>$. Предположим, что нормализатор $\mathrm{N}(\Psi)$ группы в группе изометрий $J\left(\mathbb{E}_1^2\right) \cong O(1,1) \ltimes \mathbb{R}^2$ является существенной группой. Тогда он содержит изометрию вида $h = <B, b>$, где $det(B) = 1$ и $B = \pm A_t$, $t \neq 0$.

Поскольку $h \circ \Psi = \Psi \circ h$, необходимо $\pm A_t \cdot E^{+-} = \pm E^{+-} \cdot A_t$, что эквивалентно равенству $sh\,t = 0 \Leftrightarrow t = 0$. В этом случае $B = \pm E$ и h – несущественное преобразование. Противоречие показывает, что $N(\Psi)$ – несущественная группа изометрий. Согласно теореме 1 группа изометрий орбифолда (N,g) также несущественная. Заметим, что при этом орбифолд $N = \mathbb{R}^2 / \Psi$ представляет собой полуплоскость с границей, а множество сингулярных точек есть прямая, совпадающая с границей.

Случай 3: $i=3, \Psi = <\psi>$ $i=2, \Psi = <\psi>$, где $\psi = <-E^{+-}, 0>$. Этот случай аналогичен предыдущему, и группа изометрий $J(N,g)$ несущественная.

Осталось рассмотреть последний возможный случай.

Случай 4: $i = 0, \Psi = <\psi_1, \psi_2 \mid \psi_1^2, \psi_2^2> \cong Z_2 \times Z_2>$. Не нарушая общности, можно считать, что $\psi_1 = <E^{+-}, 0>$ и $\psi_2 = <E^{-+}, 0>$, $\Psi = \{<\pm E, 0>, <E^{+-}, 0>, <E^{-+}, 0>\}$.

Заметим, что при этом орбифолд $N=\mathbb{R}^2/\Psi$ можно рассматривать как первый квадрант на плоскости с границей, причем его стратификация имеет вид $\Delta=\{\Delta_2,\Delta_1^{(1)},\Delta_1^{(2)},\Delta_0\}$, где нижний индекс указывает размерность страты, а верхний – ее номер среди страт данной размерности. Нетрудно видеть, что в данном случае $N(\Psi)=\Psi$ и группа изометрий $J(N,g)$ тривиальна.

3.4. Доказательство теоремы 2

Предположим, что (N,g) – собственный некомпактный полный плоский лоренцев орбифолд с существенной группой изометрий $J(N,g)$. Согласно теореме 1 для (N,g) существует каноническое накрывающее отображение $r:M\to N$ полным лоренцевым многообразием (M,g_M) с группой накрывающих преобразований Ψ, изоморфной либо $\mathbb{Z}_2$, либо $\mathbb{Z}_2,\times\mathbb{Z}_2$, причем Ψ – группа изометрий многообразия (M,g_M). Поскольку орбифолд N некомпактен, то и многообразие M некомпактно.

Как известно [12], полную плоскую лоренцеву метрику допускают только локально евклидовы пространства, в двумерном некомпактном случае это: евклидова плоскость, цилиндр и открытый лист Мебиуса. Согласно предложению 1 группа изометрий $J(N,g)$ орбифолда (N,g) существенна только, если существенна группа изометрий канонически накрывающего его многообразия (M,g_M). Из лемм 2 и 3 вытекает, что (M,g_M) может быть только евклидовой плоскостью.

Согласно лемме 4 существует единственный гладкий собственный двумерный орбифолд, допускающий полную плоскую лоренцеву метрику с существенной группой изометрий $J(N,g)$, и этот орбифолд есть $\mathbb{Z}_2$-конус, а g – любая полная плоская лоренцева метрика. Группа изометрий $J(N,g)$ изоморфна фактор-группе $O(1,1)/\{\pm E\}$ группы $O(1,1)$ по нормальной подгруппе $\pm E$. □

4. Примеры

Пример 1. Пусть T^2 – двумерный тор, полученный факторизацией плоскости $\mathbb{R}^2$ по группе $\Gamma=<\gamma_1,\gamma_2>$, изоморфной $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, где $\gamma_1=<E,e_1>$, $\gamma_2=<E,e_2>$. Зададим на плоскости $\mathbb{R}^2$ полную плоскую метрику g, матрица которой в каноническом базисе записываются в виде $g_{ij}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Заметим, что определено регулярное псевдориманово накрывающее отображение $k:M\to T^2$ цилиндра $M=\mathbb{R}^2/\Gamma_1$, где $\Gamma_1=<\gamma_1>$, $\gamma_1=<E,e_1>$, на указанный тор с группой накрывающих преобразований, изоморфной группе $\mathbb{Z}$. На цилиндре M индуцирована полная плоская лоренцева метрика $g_M=k^*g$. Согласно лемме 2 группа изометрий лоренцева цилиндра $J(M, g_M)$ несущественная. Группа изометрий лоренцева тора $J(T^2, g)$ существенная, так как аносовский диффеоморфизм тора f_A, заданный матрицей $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, является изометрий лоренцева тора $(T^2,\ g)$.

Этот пример показывает, что существенные изометрии тора (T^2, g) не поднимаются на цилиндр (M, g_M) относительно псевдориманова накрывающего отображения $k: M \to T^2$.

Пример 2. Рассмотрим орбифолд $N = \mathbb{R}^2 / \Gamma$, где $\Gamma = <\gamma_1,\ \gamma_2 \mid \gamma_1^2, \gamma_2^2>$, $\gamma_1 = <E, e_1>, \gamma_2 = <-E, e_1>$. Пусть $\Gamma_1 = <\gamma_1>$ и $\Gamma_2 = <\gamma_2>$, тогда $M = \mathbb{R}^2 / \Gamma_1$ – цилиндр, а $N = M / \Psi$, где группа Ψ изоморфна группе Γ_2 и группе $\mathbb{Z}$. Каноническое накрывающее отображение $r: M \to N$ представляет собой двулистное накрытие орбифолда N цилиндром M. Стратификация орбифолда N имеет вид $\Delta = \{\Delta_2, \Delta_1^0, \Delta_2^0\}$, т.е. N имеет две сингулярные точки.

Предположим, что на плоскости $\mathbb{R}^2$ задана полная плоская лоренцева метрика g^0 с матрицей (g_{ij}^0) в каноническом базисе. Так как Γ – подгруппа группы изометрий $J\left(\mathbb{R}^2, g^0\right)$, то на цилиндре M и на орбифолде N индуцированы полные плоские лоренцевы метрики g_M и g соответственно. Согласно теореме 1 $J(N, g) = N(\Psi) / \Psi$, где $N(\Psi)$ – нормализатор группы Ψ в группе изометрий $J(M, g_M)$, а $J(M, g_M) = N(\Gamma_1) / \Gamma_1$, где $N(\Gamma_1)$ – нормализатор группы Γ_1 в группе изометрий $J\left(\mathbb{R}^2, g^0\right)$.

Предположим, что $f = <B, 0>$ принадлежит $N(\Gamma_1)$. Из условия $B^T \cdot G \cdot B = G$, где G – матрица метрики g_M на цилиндре M, мы получаем:

1) если $g_{12} = 0$, то $B \in \{\pm E, E^{+-}, E^{-+}\}$;

2) если $g_{12} \neq 0$, то $B \in \{\pm E\}$.

Отсюда вытекает:

1) если $g_{12} = 0$, то группа изометрий $J(N, g)$ лоренцева орбифолда (N, g) изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$;

2) если $g_{12} \neq 0$, то группа изометрий $J(N, g)$ тривиальна.

Так как $g(e_1, e_1) = g_{11}$, то условие $g_{11} = 0$ эквивалентно тому, что вектор e_1 изотропный. При этом $g_{12} \neq 0$. Таким образом, если гладкая геодезическая, соединяющая сингулярные точки, изотропна, то группа $J(N, g)$ тривиальна. Например, если матрица $g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то группа $J(N, g)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$. Если матрица $g_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, то группа $J(N, g)$ тривиальна.

Таким образом, любая полная лоренцева метрика g на рассматриваемом орбифолде N имеет несущественную конечную группу изометрий $J(N,g)$, зависящую от метрики g, причем $J(N,g)$ либо тривиальна, либо изоморфна группе $\mathbb{Z}_2$.

Библиографический список

1. **Adem, A.** Orbifolds and stringy topology / A. Adem, J. Leida, Y Ruan // Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 2007.
2. **Багаев, А. В.** Группы автоморфизмов G-структур конечного типа на орбиобразиях / А. В. Багаев, Н. И. Жукова // Сибирский математический журнал. – 2003. – Т. 44, № 2. – Р. 263–278.
3. **Багаев, А. В.** Группы изометрий римановых орбифолдов / А. В. Багаев, Н. И. Жукова // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 4. – Р. 723–741.
4. **D'Ambra, G.** Lectures on transformation groups: geometry and dynamics in Surveys in Differential Geometry / G. D'Ambra, M. Gromov. – Bethlehem, PA, 1991. –P. 19–111.
5. **Zimmer, R. J.** Automorphism groups and fundamental groups of geometric manifolds / R. J. Zimmer // Proc. Symp. Pure Math. – 1993. – Vol. 54. – P. 693–710.
6. **Zeghib, A.** Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds, Part I: Foundations of Lorentz dynamics / A. Zeghib // GAFA. – 1999. – № 9. – P. 775–822.
7. **Zeghib, A.** Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifoldsю Part II: Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups / A. Zeghib // GAFA. – 1999. – № 9. – P. 823–854.
8. **Barbot, T.** Group Actions on Lorentz Spaces, Mathematical Aspects: a survey in The Einstein equations and the large-scale behavior of gravitational fields / A. Zeghib. – Birkhauser, Basel, 2004. – P. 401–439.
9. **Deffaf, M.** Actions of noncompact semisimple groups on Lorentz manifolds / M. Deffaf, K. Melnick, A. Zeghib // Geom. Funct. Anal. GAF. – 2008. – № 18. – P. 463–488.
10. **Жукова, Н. И.** Классификация компактных лоренцевых 2-орбифолдов с некомпактной полной группой изометрий / Н. И. Жукова, Е. А. Рогожина // Сибирский математический журнал. – 2012. – Т. 53, № 6. – Р. 1292–1309.
11. **Thurston, W. P.** The Geometry and Topology of Three-Manifolds / William P. Thurston // Electronic version 1.1. – 2002. – March. – P. 297–305.
12. **Вольф, Дж.** Пространства постоянной кривизны / Дж. Вольф. – М. : Наука, 1982.

References

1. Adem A., Leida J., Ruan Y. *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2007.
2. Bagaev A. V., Zhukova N. I. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2003, vol. 44, no. 2, pp. 263–278. [In Russian]
3. Bagaev A. V., Zhukova N. I. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2007, vol. 48, no. 4, pp. 723–741. [In Russian]
4. D'Ambra G., Gromov M. *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics in Surveys in Differential Geometry*. Bethlehem, PA, 1991, pp. 19–111.
5. Zimmer R. J. *Proc. Symp. Pure Math*. 1993, vol. 54, pp. 693–710.
6. Zeghib A. *GAFA*. 1999, no. 9, pp. 775–822.
7. Zeghib A. *GAFA*. 1999, no. 9, pp. 823–854.
8. Barbot T. *Group Actions on Lorentz Spaces, Mathematical Aspects: a survey in The Einstein equations and the large-scale behavior of gravitational fields*. Birkhauser, Basel, 2004, pp. 401–439.

9. Deffaf M., Melnick K., Zeghib A. *Geom. Funct. Anal. GAF*. 2008, no. 18, pp. 463–488.
10. Zhukova N. I., Rogozhina E. A. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian mathematical journal]. 2012, vol. 53, no. 6, pp. 1292–1309. [In Russian]
11. Thurston W. P. *Electronic version 1.1.* 2002, March, pp. 297–305.
12. Vol'f Dzh. *Prostranstva postoyannoy krivizny* [Spaces of constant curvature]. Moscow: Nauka, 1982. [In Russian]

Боголепова Елена Вадимовна
студентка, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12)

E-mail: nzhukova@hse.ru/

Bogolepova Elena Vadimovna
Student, National Research University “Higher School of Economics” (25/12 Bolshaya Pecherskaya street, Nizhny Novgorod, Russia)

Жукова Нина Ивановна
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра фундаментальной математики, главный научный сотрудник лаборатории «Топологические методы в динамике», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12)

E-mail: nzhukova@hse.ru

Zhukova Nina Ivanovna
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of fundamental mathematics, principal researcher of the Laboratory "Topological Methods in Dynamics", National Research University “Higher School of Economics” (25/12 Bolshaya Pecherskaya street, Nizhny Novgorod, Russia)

Образец цитирования:

Боголепова, Е. В. Существенные группы изометрий некомпактных двумерных плоских лоренцевых орбифолдов / Е. В. Боголепова, Н. И. Жукова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2019. – № 1 (49). – С. 14–28. – DOI 10.21685/2072-3040-2019-1-2.